1 Определение натуральных чисел

Одно из простейших определений натуральных чисел (в рамках теории множеств или любой другой логики хотя бы второго порядка) следующее: это множество $\mathbb{N}$, его элемент $0 \in \mathbb{N}$ и отображение $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых выполнен *принцип индукции Ловера-Пеано-Дедекинда*.

Этот принцип заключается в следующем: для любого множества X, его элемента $x \in X$ и отображения $f : X \to X$ существует единственное отображение $a : \mathbb{N} \to X$, для которого

$$a(0) = x; \qquad a(s(n)) = f(a(n))$$

Далее отображение a, построенное по элементу x и функции f, мы будем обозначать $I(x, f)$.

2 Некоторые фундаментальные конструкции

В качестве иллюстрации применения принципа индукции приведём построения некоторых частовстречающихся объектов.

Операция «тождественное отображение»

$$X = \mathbb{N}$$
$$x = 0$$
$$f(n) = s(n)$$

Отображение $a = I(x, f)$ удовлетворяет соотношениям:

$$a(0) = 0; \qquad a(s(n)) = s(a(n))$$

Ровно тем же соотношениям удовлетворяет тождественное отображение $\mathrm{id} = n \mapsto n$. Поэтому $I(x, f) = \mathrm{id}$.

Операция «предыдущее число»

$$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$x = (0, 0)$$
$$f(a, b) = (b, s(b))$$

Пусть $I(x, f)(n) = (p(n), q(n))$. Заметим сперва, что

$$q(0) = 0; \qquad q(s(n)) = s(q(n))$$

Отсюда сразу следует, что $q = \mathrm{id}$ (см. построение тождественной операции).

Для p же выполняется

$$p(0) = 0; \qquad p(s(n)) = q(n) = n$$

Это – искомая операция «-1» (любое положительное число она переводит в предыдущее).

Операция «прибавить a»

$$X = \mathbb{N}$$
$$x = a$$
$$f(n) = s(n)$$

Операцию $I(x, f)$ мы будем обозначать $P(a)$. Для неё выполнено:

$$P(a)(0) = a; \qquad P(a)(s(n)) = s(P(a)(n))$$

Докажем, например, сочетательный закон сложения: для любого n выполнено

$$P(a)(P(b)(n)) = P(P(a)(b))(n)$$

Пусть $u(n) = P(a)(P(b)(n))$. По определению u:

$$u(0) = P(a)(b)$$

$$u(s(n)) = P(a)(s(P(b)(n))) = s(P(a)(P(b)(n))) = s(u(n))$$

Пусть $v(n) = P(P(a)(b))(n)$. По определению v:

$$v(0) = P(a)(b)$$

$$v(s(n)) = s(P(P(a)(b))(n)) = s(v(n))$$

Вывод: что u, что v удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению. Поэтому

$$u = v = I(P(a)(b), s)$$

что и требовалось доказать.

3 Доказательства по индукции

Покажем, как классический метод математической индукции (в стиле Пеано) сводится к рассматриваемому нами принципу индукции. В этом разделе вместо $s(n)$ будем писать просто $(n+1)$.

Метод математической индукции звучит так: если есть последовательность высказываний $A_0, A_1, A_2, \ldots$, то для того, чтобы доказать их все, достаточно доказать A_0 и $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \Rightarrow A_{n+1}$.

Будем считать, что сами высказывания – элементы некоторого множества P (теория множеств отлично моделируется в рамках самой себя) и определена функция интерпретации $p : P \to \{0, 1\}$, для которой $p(x) = 1$ тогда и только тогда, когда x истинно (в смысле моделируемой логики).

Определим $i(n) = p(A_n)$. Нам нужно доказать, что если $i(0) = 1$ и для всех n выполнено $i(n) \Rightarrow i(n+1) = 1$, то $i = 1$. Дальнейшее доказательство основано на замечательном критерии (активно использующемся, например, при построении внутренней логики топосов): $A \Rightarrow B = 1$ тогда и только тогда, когда $B = A \vee B$.

Рассмотрим

$$X = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$$
$$x = (0, i(0))$$
$$f(a, b) = (a + 1, b \vee i(a + 1))$$

Докажем сперва, что $I(x, f)(n) = (n, i(n))$. Действительно:

$$(0, i(0)) = (0, i(0))$$

Также верно (в силу $i(n) \Rightarrow i(n+1) = 1$), что

$$(n + 1, i(n + 1)) = (n + 1, i(n) \vee i(n + 1))$$

Теперь докажем, что $I(x, f)(n) = (n, 1)$. В силу $i(0) = 1$ верно

$$(0, 1) = (0, i(0))$$

Из определения дизъюнкции же следует, что

$$(n + 1, 1) = (n + 1, 1 \vee i(n + 1))$$

Вывод: $i(n) = 1$ для любого n.